30/11/2016

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ : $a: I \to E$

I: σύνολο δεικτών

Οικογένειες συνόλων $\{A_i\}_{i\in I}$, A_i: σύνολα

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x : x \in A_i \ \forall i \in I\}$$

$\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_j\}_{j\in J}$ οικογ. συνόλων

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$$

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \bigcup_{(i,j)\in A\times B} (A_i \cap B_j)$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$$

Απόδειξη

Ας είναι $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} B_j$$

$$(\exists i \in I : x \in A_i) \wedge (\exists j \in J : x \in B_j)$$

$$\exists (i,j) \in I\times J : x \in A_i \wedge x \in B_j$$

$$\exists (i,j) \in I\times J \quad x \in A_i \cap B_j$$

$$x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

$\circledast$ $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

Απόδειξη

Ας είναι $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$

$\exists\, x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x)$

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I,\ \underbrace{x \in A_i \quad \text{με } y = f(x)}_{y = f(x) \in f(A_i)}$.

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I : y \in f(A_i)$

$\Rightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

Άσκηση: Ας είναι $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι αν $\{A_i\}_{i\in I}$ διαμέριση του A, η οικογένεια $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ είναι διαμέριση του B

Λύση

Ας είναι $\{A_i\}_{i\in I}$ διαμέριση του A, δηλ.

$A = \bigcup_{i\in I} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i, j \in I,\ i \neq j$

Αρκεί ν.δ.ο. $\bigcup_{i\in I} f(A_i) = B$ & $f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset,\ \forall i, j \in I,\ j \neq i$

Είναι $B \overset{\text{επί}}{=} f(A) = f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

Υποθ. ότι $\exists\, i_0, j_0 \in I,\ i_0 \neq j_0$ με $f(A_{i_0}) \cap f(A_{j_0}) \neq \emptyset$.

τότε $\exists\ y \in f(A_{i_0}) \cap f(A_{j_0})$

δηλ. $\exists\, y : y \in f(A_{i_0}) \wedge y \in f(A_{j_0})$

$\exists\, x \in A_{i_0} : f(x) = y \ \wedge\ \exists\, x' \in A_{j_0} : f(x') = y \overset{f\ 1-1}{\Longrightarrow} x = x'$

άρα $\exists\, x \in A_i \cap A_j : f(x) = y$

άτοπο, γιατί $A_i \cap A_j = \emptyset$

Αν είναι $f: A \to B$ συνάρτηση και $\{A_i\}_{i\in I}$ κάλυψη του A

ν.δ.ο. η οικογένεια $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ είναι κάλυψη του B

$\Rightarrow$ Πρέπει να είναι επί για να ισχύει η προηγούμενη απόδειξη

$A_1 \times A_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\}$

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_\nu := \{(x_1, \dots, x_\nu) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \dots,\ x_\nu \in A_\nu\}$

361-363 Προβολές

$I = \{1,2,3,4,5\}$

$P_3 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x_3 \in A_3 \qquad A_3$

$P_{(2,4)} = (\quad\quad) \in \_\ \_\ \_\ \_$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$(x_2, x_4) \qquad A_2 \times A_4$

Ας είναι $f: A \to B$ συνάρτηση και $\preceq$ διάταξη ~~του~~ B

Η f είναι άνω φραγμένη $\Leftrightarrow$ $R(f)$: άνω φράγμα
κάτω φραγμένη κάτω
φραγμένη φραγμένη

Το $a \in B$ είναι άνω φράγμα της f ~~αν~~ a: άνω φράγμα του $R(f)$
κάτω κάτω

$f: (A, \preceq_A) \to (B, \preceq_B)$

Ορισμός Παρανάρμ.:
Η f καλείται αύξουσα αν (διατηρεί τη διάταξη)

Ορισμός
Η f καλείται αύξουσα αν $\forall\, x, y \in A$ με $x \preceq_A y \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \preceq_B f(y)$
γνήσια $x \prec_A y \Rightarrow f(x) < f(y)$
φθίνουσα $\Rightarrow f(x) \succeq_B f(y)$
γνήσια $>$

Πρόταση
Ας είναι E ένα καλά διατεταγμένο σύνολο, $A \subseteq E$ και $f: E \to A$ μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση τότε
$x \preceq f(x), \ \forall\, x \in E$

$\longrightarrow$

Απόδειξη

Θεωρώ το σύνολο $B := \{x \in E : f(x) < x\}$

Αν $B = \emptyset$, τότε η πρόταση ισχύει.
Υποθέτω ότι το $B \neq \emptyset$.
Επειδή το E είναι καλά διατεταγμένο και $B \subseteq E$, το B έχει ελάχιστο στοιχείο.
Έστω α. Προφανώς, $\alpha \in B$ δηλαδή

$$f(\alpha) < \alpha$$

Επειδή f: γνησ. αύξουσα θα είναι $f(f(\alpha)) < f(\alpha)$
άρα, θα είναι και $f(\alpha) \in B$.

<u>άτοπο</u>

Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο. Το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$ δεν είναι καλά διατεταγμένο. Στο $\mathbb{N}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την πρόταση.

→ αν $\alpha(\nu) \uparrow$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ ($\alpha(\nu) \in \mathbb{N}$)
θα πρέπει $\alpha(\nu) \leq \nu$

<u>Ασκήσεις</u>

σελίδα 361 40στ
41(ι)
362 46
44α